Mathematical and Data Analytics
Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

Kerangka Numerik Transport Pencemar Sungai Satu Dimensi Menggunakan Neraca Massa dan Faktorisasi LU: Studi Eksploratif Sungai Deli

Habib Syarkowi Harahap[1)], Silvia Ramadani Siregar[2)], Eka Aulia[3)], Juni Anggita Sipahutar[4)], SuciDahlya Narpila[5)]
[1,2,3,4,5)] Universitas Islam Negeri Sumatera Utara
rahmatpanaekan@email.com[1)], silviaramadanisrg@ymail.com, ekaaulia966@email.com[3)], juni0305233104@email.com[4)], sucidahlyanarpila @uinsu.ac.id[5)]

Histori Naskah:
Diajukan: 21-11-2025
Disetujui: 03-12-2025
Publikasi:29-12-2025

ABSTRAK

Perubahan konsentrasi pencemar sungai perlu ditelaah bersama debit agar pengenceran dapat dibedakan dari perubahan beban pencemar. Penelitian ini bertujuan mengevaluasi kemampuan model adveksi–dispersi–reaksi satu dimensi pada keadaan tunak dalam menjelaskan distribusi *biochemical oxygen demand* (BOD) serta menelaah makna koreksi sumber pencemar. Analisis menggunakan data hidraulik dan konsentrasi BOD sekunder pada delapan titik pengamatan. Persamaan didiskritisasi menggunakan skema *upwind* untuk adveksi dan beda pusat untuk dispersi, dengan konsentrasi hulu dan hilir sebagai kondisi batas Dirichlet. Evaluasi dilakukan melalui penyesuaian parameter dispersi dan peluruhan, perbandingan simulasi dengan observasi, serta perhitungan *apparent source term*. Hasil menunjukkan bahwa variasi debit menyebabkan perubahan konsentrasi tidak selalu sejalan dengan perubahan beban pencemar. Penyesuaian parameter menurunkan akar rata-rata kuadrat kesalahan pada titik interior dari 6,209 menjadi 5,354 mg/L, tetapi model tanpa sumber eksternal belum mampu menjelaskan profil observasi secara memadai. Penambahan *apparent source term* memungkinkan rekonstruksi profil, namun kesesuaian tersebut merupakan konsekuensi aljabar karena koreksi diturunkan dari observasi yang sama. Dengan demikian, komponen tersebut menunjukkan kebutuhan koreksi neraca, bukan bukti sumber pencemar aktual. Model dapat digunakan sebagai kerangka diagnostik untuk menentukan prioritas pemeriksaan lapangan, sementara penerapannya untuk prediksi dan identifikasi sumber memerlukan pengukuran masukan lateral, pengujian sensitivitas numerik, dan validasi independen.

Kata kunci: *BOD; debit sungai; adveksi–dispersi–reaksi; neraca massa; apparent source term.*

PENDAHULUAN

Pencemaran sungai merupakan persoalan lingkungan yang berkaitan dengan masuknya berbagai beban pencemar dari aktivitas domestik, industri, limpasan permukaan, maupun sumber lainnya ke dalam sistem perairan. Konsentrasi suatu bahan pencemar pada suatu lokasi tidak hanya ditentukan oleh jumlah bahan yang masuk, tetapi juga oleh proses transport dan transformasi yang berlangsung sepanjang aliran sungai. Pergerakan air menyebabkan bahan pencemar mengalami transport advektif, sedangkan proses dispersi menyebabkan penyebaran konsentrasi dari wilayah berkonsentrasi tinggi menuju wilayah berkonsentrasi lebih rendah. Perubahan konsentrasi juga dapat dipengaruhi oleh masukan eksternal serta proses transformasi

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

fisik, kimia, dan biologis. Kerangka pemodelan kualitas air berbasis neraca massa mengintegrasikan proses-proses tersebut untuk menggambarkan perubahan massa dan konsentrasi suatu konstituen di dalam badan air (Wool et al., 2020).

Pendekatan *advection–dispersion–reaction* (ADR) merupakan salah satu formulasi matematis yang dapat digunakan untuk menggambarkan transport dan perubahan konsentrasi bahan pencemar sepanjang sungai. Dalam kerangka tersebut, proses adveksi merepresentasikan perpindahan bahan pencemar mengikuti aliran air, sedangkan dispersi menggambarkan proses pencampuran dan penyebaran konsentrasi. Komponen reaksi dan *source/sink* dapat ditambahkan untuk merepresentasikan transformasi serta masukan atau pengurangan massa pencemar. Model kualitas air seperti *Water Quality Analysis Simulation Program* (WASP) menggunakan prinsip konservasi massa dengan mengintegrasikan transport advektif dan dispersif, beban langsung maupun difus, kondisi batas, serta transformasi kinetik (Wool et al., 2020). Formulasi satu dimensi dengan koefisien yang dapat berubah secara spasial juga telah dikembangkan untuk menggambarkan transport pencemar pada jaringan sungai dan mempertimbangkan *source* serta *reaction terms* dalam persamaan transport (Fardadi Shilsar et al., 2023).

Sungai Deli merupakan salah satu sungai yang melintasi Kota Medan dan telah menjadi objek penelitian kualitas air serta pemodelan transport pencemar. Penelitian terdahulu pada Sungai Deli menganalisis beberapa parameter kualitas air, antara lain pH, suhu, *dissolved oxygen* (DO), *chemical oxygen demand* (COD), *biochemical oxygen demand* (BOD), dan kromium (Cr). Penelitian tersebut juga menggunakan model matematis satu dimensi *plug flow* untuk mensimulasikan transport kromium serta model Streeter–Phelps untuk menganalisis perubahan DO. Hasil penelitian menunjukkan bahwa pemodelan matematis dapat digunakan untuk memperoleh profil konsentrasi yang mendekati hasil observasi setelah dilakukan kalibrasi parameter model (Hasibuan, 2013).

Interpretasi perubahan kualitas air tidak cukup dilakukan hanya berdasarkan perubahan konsentrasi. Beban pencemar juga dipengaruhi oleh debit aliran sehingga perubahan debit dapat menyebabkan perubahan beban meskipun konsentrasi relatif tidak berubah secara besar. Dalam kerangka neraca massa, aliran advektif, dispersi, beban langsung dan difus, serta transformasi harus dipertimbangkan secara bersamaan (Wool et al., 2020). Oleh karena itu, perubahan konsentrasi pada dua titik pengamatan perlu dianalisis bersama dengan perubahan debit untuk membedakan perubahan akibat dinamika hidrodinamika dari perubahan yang membutuhkan tambahan atau pengurangan massa dalam sistem. Pendekatan berbasis neraca massa seperti ini juga menjadi dasar dalam pemodelan transport pencemar pada jaringan sungai dengan parameter hidraulik dan koefisien transport yang dapat bervariasi antarsegmen (Fardadi Shilsar et al., 2023).

Ketika profil konsentrasi hasil observasi tidak dapat dijelaskan hanya oleh proses transport dan transformasi yang digunakan dalam model, komponen *source/sink* dapat digunakan untuk merepresentasikan tambahan atau pengurangan massa yang belum dijelaskan oleh proses tersebut. Dalam model neraca massa kualitas air, komponen *source/sink* dapat berasal dari beban eksternal maupun proses transformasi kinetik (Wool et al., 2020). Pendekatan transport satu dimensi dengan *source* dan *reaction terms* juga telah digunakan untuk menggambarkan distribusi pencemar pada jaringan sungai dengan karakteristik koefisien yang dapat berubah secara spasial (Fardadi Shilsar et al., 2023). Dalam penelitian ini, *source term* pada tahap awal tidak dimaksudkan untuk secara langsung mengidentifikasi lokasi sumber pencemar tertentu, tetapi digunakan sebagai komponen matematis untuk mengevaluasi tambahan beban yang diperlukan agar profil model dapat merepresentasikan profil observasi.

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

Persamaan transport yang telah didiskritisasi menghasilkan sistem persamaan linear yang harus diselesaikan secara numerik. Dalam pemodelan kualitas air, persamaan diferensial yang menggambarkan neraca massa pada umumnya perlu direpresentasikan secara numerik melalui grid atau segmen komputasi sebelum konsentrasi pada setiap lokasi dapat dihitung (Wool et al., 2020). Pendekatan diskritisasi tersebut menghasilkan sistem aljabar yang memungkinkan metode numerik digunakan untuk memperoleh distribusi konsentrasi pada titik-titik komputasi. Dalam penelitian ini, sistem tersebut dinyatakan dalam bentuk

$$A\mathrm{C} = \mathrm{b}$$

atau, ketika komponen *source* dimasukkan,

$$A\mathrm{C} = \mathrm{b} + \mathrm{S}.$$

Matriks koefisien kemudian difaktorkan menggunakan faktorisasi LU,

$$A = LU,$$

sehingga penyelesaian sistem dilakukan melalui *forward substitution* dan *back substitution*. Dengan demikian, metode Aljabar Numerik tidak ditempatkan sebagai perhitungan tambahan, tetapi sebagai metode komputasi untuk menyelesaikan sistem persamaan yang berasal langsung dari formulasi transport pencemar.

Penelitian terdahulu pada Sungai Deli telah menunjukkan penerapan model transport satu dimensi untuk kromium dan model *Streeter–Phelps* untuk DO (Hasibuan, 2013). Pengembangan model transport sungai juga telah menunjukkan bahwa formulasi satu dimensi dapat mempertimbangkan adveksi, dispersi, reaksi, *source terms*, serta koefisien yang bervariasi secara spasial (Fardadi Shilsar et al., 2023). Berdasarkan perkembangan tersebut, penelitian ini diarahkan pada pengembangan kerangka numerik yang menghubungkan karakteristik hidrodinamika, neraca massa pencemar, persamaan *advection–dispersion–reaction*, estimasi *apparent source term*, dan penyelesaian sistem persamaan linear menggunakan faktorisasi LU dalam satu alur komputasi. Tujuan penelitian ini adalah mengembangkan dan menguji secara eksploratif kerangka numerik satu dimensi untuk menganalisis transport pencemar sepanjang sungai melalui tahapan verifikasi hidrodinamika, analisis neraca massa, formulasi model transport, analisis sensitivitas parameter, estimasi *source term*, dan penyelesaian sistem numerik menggunakan faktorisasi LU.

METODE PENELITIAN

Desain Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian pemodelan numerik yang dikembangkan untuk menggambarkan transport pencemar secara longitudinal pada sistem sungai. Kerangka penelitian mengintegrasikan data hidrodinamika, konsentrasi kualitas air, neraca massa, persamaan *advection–dispersion–reaction* (ADR), dan penyelesaian sistem persamaan linear menggunakan faktorisasi LU. Pendekatan neraca massa merupakan dasar penting dalam pemodelan kualitas air karena perubahan massa suatu konstituen dapat direpresentasikan melalui transport, masukan atau keluaran massa, serta proses transformasi di dalam badan air (Wool et al., 2020).

Pada tahap akhir, model transport tanpa *source term* dibandingkan dengan profil konsentrasi observasi eksploratori. Ketidaksesuaian antara keduanya kemudian digunakan untuk menghitung *apparent source term*.

Data dan Struktur Pengamatan

Dataset eksploratori terdiri atas delapan titik pengamatan, yaitu P1 sampai P8. Variabel hidrodinamika yang digunakan meliputi:

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

$A = luas\ penampang, v =$ kecepatan aliran\]

dan:

$$Q = \text{debit.}$$

Data kualitas air yang digunakan dalam tahap eksplorasi meliputi:

$$BOD, \quad COD, \quad DO.$$

Nilai BOD, COD, dan DO pada tahap ini diperoleh melalui pembacaan/digitasi dari grafik sumber terdahulu. Oleh karena itu, nilai tersebut diperlakukan sebagai data eksploratori, bukan sebagai data observasi mentah untuk validasi lingkungan.

Konteks Sungai Deli dipilih karena penelitian terdahulu telah mengkaji kualitas air dan transport kromium pada sungai tersebut menggunakan pendekatan pemodelan satu dimensi serta model Streeter–Phelps untuk DO (Hasibuan, 2013).

Verifikasi Data Hidrodinamika

Tahap pertama dilakukan dengan memverifikasi hubungan antara luas penampang, kecepatan aliran, dan debit menggunakan:

$$\boxed{Q = Av}$$

dengan:

- Q= debit (m^3/s)\);
- A = luas penampang (m^2);
- v = kecepatan rata-rata aliran (m/s).

Debit hasil perhitungan dibandingkan dengan nilai debit pada dataset. Selisih relatif dihitung menggunakan:

$$\boxed{E_Q = \left|\frac{Q_{\text{calc}} - Q_{\text{obs}}}{Q_{\text{obs}}}\right| \times 100\%}$$

Langkah ini dilakukan untuk memastikan bahwa data hidrodinamika yang digunakan pada tahap berikutnya memiliki konsistensi aritmetika sebelum dimasukkan ke dalam model transport.

Penyusunan Koordinat Longitudinal

Titik pengamatan kemudian disusun berdasarkan posisi longitudinalnya terhadap aliran sungai. Urutan yang digunakan dalam analisis adalah:

$$\boxed{P1 \rightarrow P2 \rightarrow P3 \rightarrow P5 \rightarrow P4 \rightarrow P6 \rightarrow P7 \rightarrow P8}$$

Jarak antar titik dihitung dan kemudian dijumlahkan secara kumulatif sehingga diperoleh koordinat:

$$\boxed{x_i}$$

untuk setiap titik pengamatan.

Pada tahap eksplorasi ini, koordinat x merupakan jarak geografis kumulatif awal, bukan jarak yang telah ditelusuri mengikuti centerline sungai. Oleh karena itu, koordinat tersebut diberi status *preliminary longitudinal coordinate*.

Pendekatan ini digunakan hanya untuk membangun dan menguji alur numerik. Pada penerapan menggunakan data riil, koordinat akan direkonstruksi berdasarkan panjang aktual alur sungai.

Representasi Hidrodinamika Spasial

Berdasarkan data diskrit pada titik pengamatan, kecepatan dan debit direpresentasikan sebagai fungsi posisi:

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

$$\boxed{v = v(x)}$$

dan:

$$\boxed{Q = Q(x)}.$$

Representasi spasial ini digunakan karena debit dan kecepatan tidak menunjukkan nilai konstan sepanjang titik pengamatan.

Dalam model kualitas air, karakteristik hidrodinamika merupakan bagian penting dalam menentukan transport konstituen karena transport advektif bergantung pada kondisi aliran, sedangkan dispersi bergantung pada karakteristik transport sepanjang domain model (Wool et al., 2020).

Interpolasi spasial digunakan untuk memperoleh representasi kontinu dari data hidrodinamika diskrit. Pada tahap ini digunakan interpolasi yang mempertahankan bentuk data (*shape-preserving interpolation*) untuk menghindari osilasi numerik yang tidak didukung oleh data pengamatan.

Perhitungan Beban Pencemar

Konsentrasi pencemar tidak dianalisis secara terpisah dari debit. Beban pencemar pada suatu penampang dihitung sebagai:

$$\boxed{L = QC}$$

dengan:

- L = beban pencemar;
- Q = debit;
- C = konsentrasi.

Untuk dua titik yang berurutan:

$$\boxed{\Delta L = L_{i+1} - L_i}$$

Perubahan beban kemudian dinormalisasi terhadap panjang segmen:

$$\boxed{S_{\text{app},i} = \frac{\Delta L_i}{\Delta x_i}}$$

sehingga diperoleh ukuran perubahan beban per satuan panjang.

Nilai tersebut disebut sebagai apparent source/sink rate, karena perubahan beban bersih dapat dipengaruhi oleh berbagai proses, termasuk masukan lateral, pengambilan air, perubahan hidrodinamika, transformasi, maupun ketidakpastian pengukuran. Model kualitas air berbasis neraca massa memang memungkinkan masukan langsung dan difus serta proses transformasi dimasukkan sebagai bagian dari persamaan massa (Wool et al., 2020).

Persamaan Transport Pencemar

Transport pencemar dimodelkan menggunakan formulasi satu dimensi *advection–dispersion–reaction*. Pendekatan satu dimensi memungkinkan perubahan konsentrasi direpresentasikan sepanjang koordinat longitudinal sungai. Formulasi transport satu dimensi dengan komponen adveksi, dispersi, reaksi, dan *source term* telah digunakan untuk merepresentasikan transport pencemar pada jaringan sungai (Fardadi Shilsar et al., 2023).

Persamaan umum yang digunakan adalah:

$$\boxed{\frac{\partial (AC)}{\partial t} + \frac{\partial (QC)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(AD\frac{\partial C}{\partial x}\right) - kAC + S}$$

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

dengan:

- A= luas penampang;
- C = konsentrasi pencemar;
- Q = debit;
- D= koefisien dispersi longitudinal;
- k = konstanta peluruhan orde pertama;
- S = *source/sink term*.

Kondisi Steady-State

Pada tahap eksplorasi, model diselesaikan dalam kondisi *steady-state*. Dengan demikian:

$$\frac{\partial(AC)}{\partial t} = 0$$

sehingga persamaan menjadi:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(QC - AD\frac{dC}{dx}\right) + kAC = S(x)}$$

Bentuk fluks total yang digunakan adalah:

$$\boxed{F = QC - AD\frac{dC}{dx}}$$

sehingga:

$$\boxed{\frac{dF}{dx} + kAC = S}$$

Formulasi berbasis fluks ini kemudian digunakan sebagai dasar diskritisasi numerik.

Diskritisasi Numerik

Domain sungai dibagi menjadi sejumlah titik komputasi yang berimpit dengan titik pengamatan.

Untuk titik interior i, fluks pada sisi kiri dan kanan ditulis sebagai:

$$F_{i-\frac{1}{2}} = Q_{i-\frac{1}{2}}C_{i-1} - DA_{i-\frac{1}{2}}\frac{C_i - C_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}}$$

dan:

$$F_{i+\frac{1}{2}} = Q_{i+\frac{1}{2}}C_i - DA_{i+\frac{1}{2}}\frac{C_{i+1} - C_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}}.$$

Pendekatan adveksi menggunakan skema *upwind*, sedangkan komponen dispersi menggunakan pendekatan beda hingga terpusat pada gradien konsentrasi.

Neraca massa pada titik interior kemudian dituliskan:

$$\boxed{\frac{F_{i+\frac{1}{2}} - F_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x_i} + kA_iC_i = S_i}$$

Bentuk diskrit tersebut menghasilkan persamaan linear yang menghubungkan:

$$C_{i-1}, \quad C_i, \quad C_{i+1}.$$

Karena hubungan tersebut hanya melibatkan titik tetangga, matriks koefisien yang terbentuk memiliki struktur yang relatif jarang dan dominan tridiagonal pada bagian interior.

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

Pembentukan Sistem Persamaan Linear

Setelah seluruh persamaan diskrit disusun, model dinyatakan dalam bentuk:

$$\boxed{\mathrm{A}_m\mathrm{C} = \mathrm{b}}$$

untuk model tanpa source term.

Ketika source term dimasukkan:

$$\boxed{\mathrm{A}_m\mathrm{C} = \mathrm{b} + \mathrm{S}}$$

dengan:

$$\mathrm{C} = [C_1, C_2, \dots, C_n]^T.$$

Matriks A_m berisi koefisien transport yang diperoleh dari debit, luas penampang, koefisien dispersi, konstanta reaksi, dan panjang segmen.

Penggunaan sistem linear sebagai bentuk akhir dari diskritisasi model merupakan praktik umum dalam komputasi numerik; penyelesaian sistem $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ merupakan salah satu persoalan fundamental dalam *numerical linear algebra* dan berbagai aplikasi rekayasa (Datta, 2010).

Penyelesaian Menggunakan Faktorisasi LU

Sistem linear kemudian diselesaikan menggunakan faktorisasi LU:

$$\boxed{\mathrm{A}_m = \mathrm{LU}}$$

dengan(L) sebagai matriks segitiga bawah dan (U) sebagai matriks segitiga atas.

Faktorisasi dilakukan menggunakan algoritma Doolittle dengan diagonal matriks l_{ii} ditetapkan:

$$l_{ii} = 1.$$

Bentuk umum algoritmanya adalah:

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\, u_{kj}$$

dan:

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\, u_{kj}}{u_{jj}}.$$

Faktorisasi LU memungkinkan sistem linear diubah menjadi dua sistem triangular yang lebih mudah diselesaikan. Pendekatan tersebut merupakan bagian fundamental dari penyelesaian sistem linear numerik dan dibahas secara khusus dalam literatur *numerical linear algebra* (Datta, 2010; Lyche et al., 2020).

Forward dan Back Substitution

Setelah:

$$\mathrm{A}_m = \mathrm{LU}$$

diperoleh:

$$\mathrm{LUC} = \mathrm{b}.$$

Variabel antara:

$$\boxed{\mathrm{y} = \mathrm{UC}}$$

digunakan sehingga:

$$\boxed{\mathrm{Ly} = \mathrm{b}}$$

diselesaikan menggunakan *forward substitution*.

Selanjutnya:

$$\boxed{\mathrm{UC} = \mathrm{y}}$$

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

diselesaikan menggunakan *back substitution*.

Prosedur ini sesuai dengan struktur dasar penyelesaian sistem linear melalui LU factorization, yaitu memfaktorkan matriks menjadi bentuk yang lebih sederhana kemudian menyelesaikan sistem triangular secara berurutan (Datta, 2010).

Verifikasi Faktorisasi LU

Ketepatan faktorisasi diverifikasi menggunakan:

$$E_{LU} = \max_{i,j} |a_{ij} - (LU)_{ij}|$$

Semakin mendekati nol nilai E_{LU}, semakin baik rekonstruksi matriks hasil faktorisasi.

Selain itu, solusi LU dibandingkan dengan solusi yang diperoleh menggunakan penyelesaian sistem linear langsung untuk memeriksa konsistensi solusi.

Residual sistem dihitung sebagai:

$$\mathrm{r} = \mathrm{A}_m\mathrm{C} - \mathrm{b}$$

dengan:

$$\|\mathrm{r}\|_\infty = \max_i |r_i|$$

sebagai ukuran kesalahan residual numerik.

Analisis Sensitivitas Parameter

Model transport-only diuji terhadap variasi:

$$D = 0.1,\ 0.5,\ 1,\ 2,\ 5,\ 10,\ 20,\ 50,\ 100\ m^2/s$$

dan:

$$k = 0,\ 0.01,\ 0.03,\ 0.05,\ 0.1,\ 0.2,\ 0.5,\ 1\ /day.$$

Untuk setiap kombinasi parameter, model diselesaikan dan dibandingkan dengan konsentrasi observasi eksploratori.

Ukuran kesalahan yang digunakan adalah:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(C_{obs,i} - C_{model,i}\right)^2}$$

serta:

$$MAE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|C_{obs,i} - C_{model,i}\right|$$

Analisis ini digunakan untuk **eksplorasi sensitivitas**, bukan untuk menetapkan nilai parameter fisik final sungai.

Estimasi Apparent Source Term

Setelah model transport-only dievaluasi, *source term* dihitung berdasarkan profil konsentrasi observasi eksploratori.

Jika:

$$\mathrm{A}_m\mathrm{C}_{obs} = \mathrm{b} + \mathrm{S}$$

maka:

$$\mathrm{S} = \mathrm{A}_m\mathrm{C}_{obs} - \mathrm{b}$$

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

Nilai (S) yang diperoleh disebut *apparent source term*, karena nilai tersebut menunjukkan tambahan atau pengurangan massa yang secara matematis diperlukan untuk mereproduksi profil observasi berdasarkan struktur model yang digunakan.

Nilai tersebut tidak digunakan sebagai bukti langsung mengenai lokasi sumber pencemar aktual.

Pendekatan ini penting karena penelitian transport sungai yang memasukkan *source* dan *reaction terms* memang membedakan antara representasi matematis sumber dan identifikasi sumber fisik di lapangan (Fardadi Shilsar et al., 2023).

Rekonstruksi Profil Konsentrasi

Setelah (S) diperoleh, sistem:

$$\boxed{\mathrm{A}_m\mathrm{C} = \mathrm{b} + \mathrm{S}}$$

diselesaikan kembali menggunakan LU.

Profil hasil:

$$C_{\text{reconstructed}}$$

kemudian dibandingkan dengan:

$$C_{\text{observed}}.$$

Kesalahan rekonstruksi dihitung menggunakan:

$$\boxed{e_i = C_{\text{reconstructed},i} - C_{\text{observed},i}}$$

dan:

$$\boxed{E_{\max} = \max_i |e_i|}$$

Tahap ini digunakan untuk memverifikasi bahwa *source-augmented system* yang dibangun mampu merekonstruksi profil observasi secara numerik.

HASIL PENELITIAN

Verifikasi dan Karakteristik Hidrodinamika

Analisis diawali dengan verifikasi hubungan antara luas penampang, kecepatan aliran, dan debit menggunakan persamaan:

$$Q = Av$$

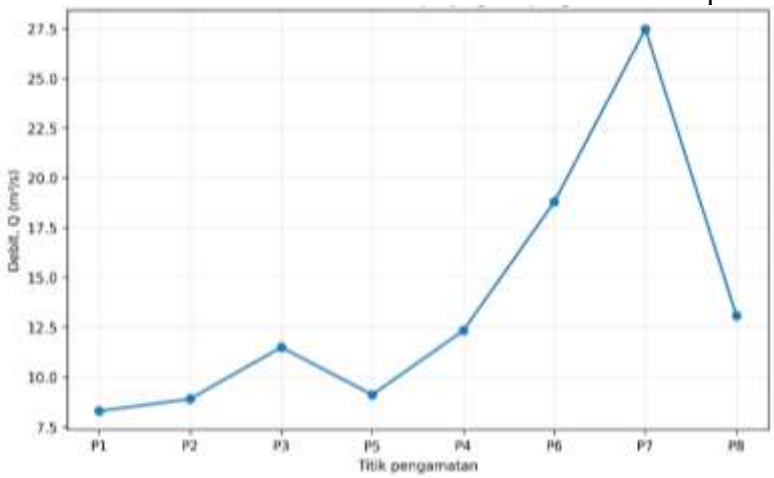
Pemeriksaan konsistensi aritmetika dilakukan dengan membandingkan debit pada Tabel 1 terhadap hasil perkalian luas penampang dan kecepatan rata-rata aliran. Berdasarkan angka yang ditampilkan pada tabel, selisih relatif absolut berada pada rentang 0,001298–0,022487%, dengan nilai maksimum pada P2. Perbedaan yang kecil tersebut menunjukkan konsistensi aritmetika antarvariabel pada presisi tabel yang tersedia. Pemeriksaan ini tidak diperlakukan sebagai verifikasi independen terhadap ketelitian pengukuran hidrodinamika.

Tabel 1. Karakteristik hidrodinamika pada titik pengamatan

Titik	Luas penampang A(m²)	Kecepatan v (m/s)	Debit Q (m³/s)
P1	16,77	0,494	8,283
P2	19,00	0,468	8,894
P3	22,84	0,503	11,489
P5	17,65	0,516	9,106
P4	25,52	0,483	12,326
P6	41,04	0,458	18,796
P7	55,72	0,493	27,469
P8	78,81	0,166	13,082

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

Kecepatan aliran pada delapan titik berada pada rentang 0,166–0,516 m/s, sedangkan debit berada pada rentang 8,283–27,469 m³/s. Kecepatan tertinggi terdapat pada P5 dan terendah pada P8. Debit tertinggi terdapat pada P7, sedangkan debit terendah terdapat pada P1. Variasi tersebut digunakan sebagai masukan hidrodinamika dalam formulasi model transport.



Gambar 1. *Variasi debit sepanjang titik pengamatan.*

Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 1, debit mengalami perubahan sepanjang domain penelitian dan tidak dapat direpresentasikan menggunakan satu nilai konstan. Variasi debit tersebut selanjutnya digunakan sebagai bagian dari kondisi hidrodinamika dalam model transport.

Susunan Longitudinal Titik Pengamatan

Titik pengamatan disusun berdasarkan urutan posisi longitudinal yang digunakan dalam proses pemodelan sebagai berikut:

$$P1 \rightarrow P2 \rightarrow P3 \rightarrow P5 \rightarrow P4 \rightarrow P6 \rightarrow P7 \rightarrow P8$$

Rentang koordinat longitudinal kumulatif pada tahap eksplorasi adalah:

$$0 - 18{,}667\ km.$$

Urutan tersebut digunakan secara konsisten dalam analisis kualitas air, neraca massa, dan pemodelan transport. Koordinat yang digunakan pada tahap ini merupakan koordinat longitudinal eksploratori berdasarkan jarak geografis kumulatif dan belum merupakan rekonstruksi final *river centerline*.

Profil Kualitas Air

Profil kualitas air dianalisis menggunakan tiga parameter utama, yaitu *biochemical oxygen demand* (BOD), *chemical oxygen demand* (COD), dan *dissolved oxygen* (DO).

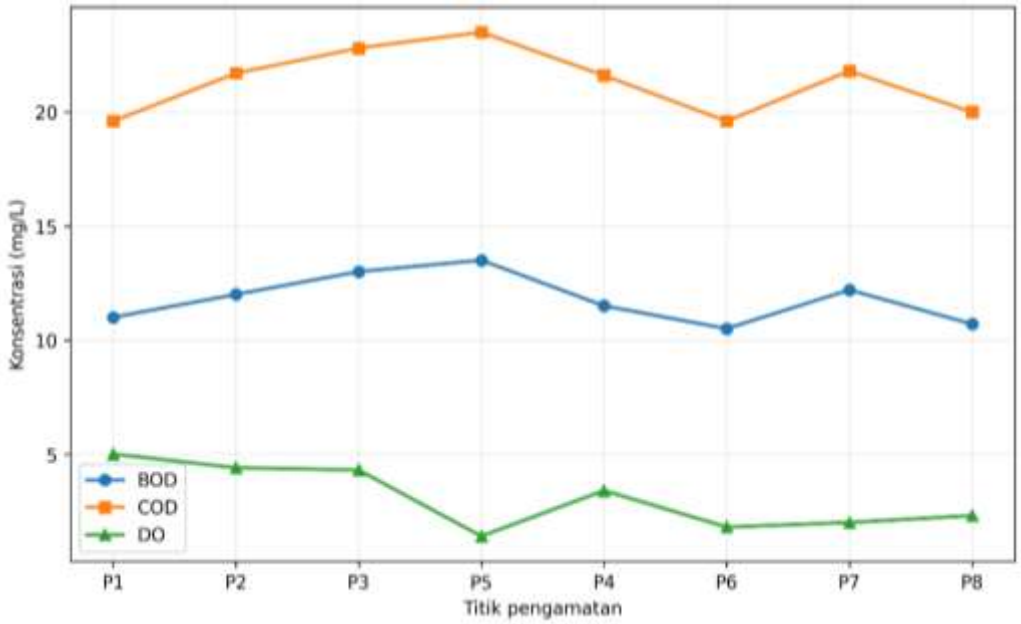
Tabel 2. Profil kualitas air pada titik pengamatan

Titik	BOD (mg/L)	COD (mg/L)	DO (mg/L)
P1	11,0	19,6	5,0
P2	12,0	21,7	4,4
P3	13,0	22,8	4,3
P5	13,5	23,5	1,4
P4	11,5	21,6	3,4
P6	10,5	19,6	1,8
P7	12,2	21,8	2,0
P8	10,7	20,0	2,3

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

BOD meningkat dari 11,0 mg/L pada P1 menjadi 13,5 mg/L pada P5, kemudian menurun menjadi 10,5 mg/L pada P6 dan kembali meningkat menjadi 12,2 mg/L pada P7. COD menunjukkan pola yang relatif serupa, dengan peningkatan dari 19,6 mg/L pada P1 hingga 23,5 mg/L pada P5, kemudian menurun menjadi 19,6 mg/L pada P6.

DO menunjukkan pola yang berbeda. Konsentrasi DO menurun dari 5,0 mg/L pada P1 menjadi 1,4 mg/L pada P5, kemudian meningkat menjadi 3,4 mg/L pada P4 dan berada pada kisaran 1,8–2,3 mg/L pada P6–P8.



Gambar 2. *Profil BOD, COD, dan DO sepanjang titik pengamatan.*

Gambar 2 menunjukkan bahwa perubahan kualitas air bersifat fluktuatif sepanjang domain. Tidak terdapat kecenderungan linear tunggal yang dapat menjelaskan seluruh perubahan BOD, COD, dan DO.

Analisis Neraca Massa Pencemar

Beban pencemar dihitung berdasarkan hubungan:

$$L = QC$$

Dengan L merupakan beban pencemar, Q merupakan debit, dan C merupakan konsentrasi. Perubahan beban antarsegmen dihitung menggunakan:

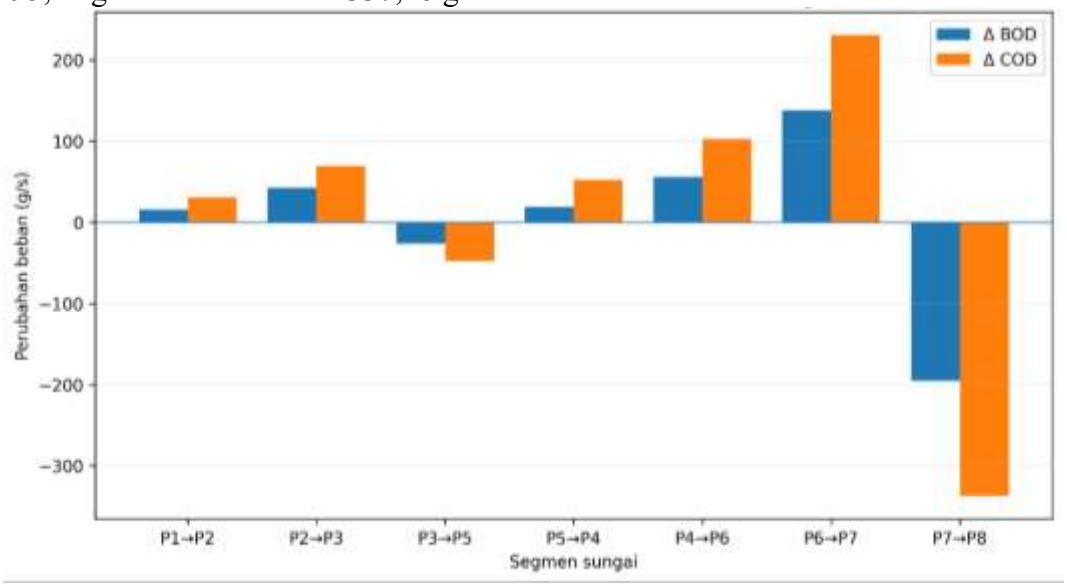
$$\Delta L = L_{out} - L_{in}.$$

Tabel 3. Perubahan beban BOD dan COD antarsegmen

Segmen	ΔQ (m³/s)	ΔL_{BOD} (g/s)	ΔL_{COD} (g/s)
P1 → P2	+0,611	+15,62	+30,65
P2 → P3	+2,595	+42,63	+68,95
P3 → P5	−2,383	−26,43	−47,96
P5 → P4	+3,220	+18,82	+52,25
P4 → P6	+6,470	+55,61	+102,16
P6 → P7	**+8,673**	**+137,76**	**+230,42**
P7 → P8	−14,387	−195,14	−337,18

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

Segmen P6→P7 menunjukkan peningkatan beban terbesar, yaitu 137,76 g/s untuk BOD dan 230,42 g/s untuk COD. Sebaliknya, segmen P7→P8 menunjukkan penurunan beban terbesar, yaitu 195,14 g/s untuk BOD dan 337,18 g/s untuk COD.



Gambar 3. *Perubahan beban BOD dan COD antarsegmen.*

Gambar 3 menunjukkan bahwa perubahan beban pencemar tidak seragam sepanjang domain. Peningkatan beban pada P6→P7 menjadi salah satu bagian penting yang selanjutnya dianalisis dalam formulasi transport dan *source term*.

Konsentrasi Ekuivalen Aliran Lateral

Untuk mengevaluasi perubahan massa yang berkaitan dengan perubahan debit, konsentrasi ekuivalen aliran lateral dihitung menggunakan:

$$C_L = \frac{Q_{out}C_{out} - Q_{in}C_{in}}{Q_{out} - Q_{in}}.$$

Tabel 4. Konsentrasi ekuivalen aliran lateral

Segmen	ΔQ dalam m³/s	C_l BOD dalam mg/L	C_l COD dalam mg/L
P1 → P2	0,611	25,56	50,17
P2 → P3	2,595	16,43	26,57
P5 → P4	3,220	5,84	16,23
P4 → P6	6,470	8,59	15,79
P6 → P7	8,673	15,88	26,57

Berdasarkan neraca ekuivalen pada segmen dengan kenaikan debit, konsentrasi ekuivalen BOD berada pada rentang 5,84–25,56 mg/L, sedangkan COD berada pada rentang 15,79–50,17 mg/L. Nilai ekuivalen BOD terendah terdapat pada segmen P5→P4 dan tertinggi pada P1→P2. Nilai ekuivalen COD terendah terdapat pada P4→P6 dan tertinggi pada P1→P2.

Nilai pada Tabel 4 merupakan konsentrasi ekuivalen yang diturunkan dari perubahan debit dan beban advektif antarpenampang. Penafsiran nilai tersebut sebagai konsentrasi masukan lateral mensyaratkan kondisi tunak dan pencampuran yang memadai pada penampang, serta pengabaian transformasi BOD atau COD dan perubahan fluks dispersi antarujung segmen. Dengan demikian, nilai tersebut digunakan sebagai indikator neraca, bukan sebagai hasil

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

pengukuran aliran lateral atau bukti keberadaan sumber pencemar tertentu. Segmen dengan penurunan debit tidak ditafsirkan sebagai masukan lateral menggunakan rumus ini karena memerlukan representasi keluaran air dan massa tersendiri.

Sebagai analisis neraca tambahan, konsentrasi ekuivalen aliran lateral dihitung untuk segmen dengan $\Delta Q > 0$ menggunakan $C_l = \Delta(QC)/\Delta Q$. Perhitungan ini memperlakukan selisih beban advektif sebagai beban ekuivalen yang menyertai kenaikan debit. Reaksi dan perubahan fluks dispersi tidak dipisahkan dalam perhitungan tersebut. Oleh karena itu, hasilnya dilaporkan sebagai indikator eksploratori dan tidak digunakan untuk mengidentifikasi konsentrasi atau lokasi sumber lateral aktual. Untuk $\Delta Q \leq 0$, besaran tersebut tidak disajikan sebagai konsentrasi masukan lateral. Kenaikan debit bersih juga tidak meniadakan kemungkinan adanya masukan dan keluaran air secara bersamaan.

Model Tanpa Sumber Eksternal

Tahap berikutnya dilakukan menggunakan model transport tanpa memasukkan *source term*, sehingga:

$$S(x) = 0.$$

Pada konfigurasi awal digunakan:

$$D = 10\ m^2/s$$

dan:

$$k = 0{,}1/day.$$

Hasil model dibandingkan dengan konsentrasi BOD observasi.

Tabel 5. BOD observasi dan model tanpa sumber eksternal

Titik	BOD observasi (mg/L)	BOD model (mg/L)
P1	11,00	11,00
P2	12,00	9,04
P3	13,00	7,98
P5	13,50	7,56
P4	11,50	5,10
P6	10,50	3,38
P7	12,20	3,81
P8	10,70	10,70

Nilai RMSE yang diperoleh dari konfigurasi awal adalah:

$$\boxed{RMSE = 5{,}377\ mg/L}.$$

Hasil tersebut menunjukkan adanya perbedaan antara profil model dan observasi, terutama pada bagian tengah domain.

Sensitivitas Parameter Transport

Untuk mengevaluasi pengaruh parameter transport terhadap kesesuaian model, dilakukan eksplorasi terhadap:

$$D = 0{,}1 - 100\ m^2/s$$

dan:

$$k = 0 - 1/day.$$

Kombinasi parameter dengan nilai RMSE minimum diperoleh pada:

$$\boxed{D = 0{,}1\ m^2/s}$$

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

dan:

$$\boxed{k = 0/day}.$$

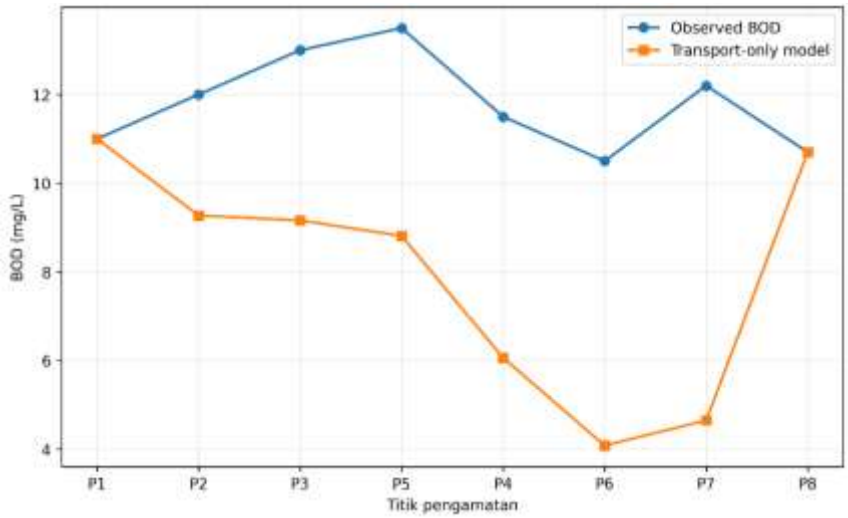
Tabel 6. Perbandingan RMSE dan MAE pada seluruh titik dan titik interior

Konfigurasi	RMSE semua	RMSE interior	MAE semua	MAE interior
Konfigurasi awal	5,377	6,209	4,479	5,972
Minimum dalam rentang uji	4,637	5,354	3,834	5,112

seluruh metrik dinyatakan dalam mg/L dan dihitung berdasarkan nilai model yang ditampilkan pada tabel. Titik interior meliputi P2, P3, P5, P4, P6, dan P7.

Tabel 7. BOD observasi, model, dan residual pada parameter optimum

Titik	BOD observasi (mg/L)	BOD model (mg/L)	Residual absolut (mg/L)
P1	11,00	11,00	0,00
P2	12,00	9,27	2,73
P3	13,00	9,16	3,84
P5	13,50	8,81	4,69
P4	11,50	6,06	5,44
P6	10,50	4,08	6,42
P7	12,20	4,65	**7,55**
P8	10,70	10,70	0,00



Gambar 4. *Perbandingan BOD observasi dan model tanpa sumber eksternal pada konfigurasi parameter dengan RMSE minimum.*

Gambar 4 menunjukkan bahwa model tanpa sumber eksternal belum mengikuti profil data sekunder secara konsisten. Dalam rentang parameter yang diuji, RMSE seluruh delapan titik menurun dari 5,377 menjadi 4,637 mg/L. Berdasarkan angka tabel, RMSE enam titik interior menurun dari sekitar 6,209 menjadi 5,354 mg/L. Kombinasi dengan RMSE minimum diperoleh pada $D = 0{,}1 \text{m}^2/\text{s}$ dan k = 0 $hari^{-1}$,yaitu pada batas rentang pencarian. Hasil ini menunjukkan minimum pada kombinasi diskrit yang diuji dan belum menetapkan nilai parameter fisik Sungai Deli.

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

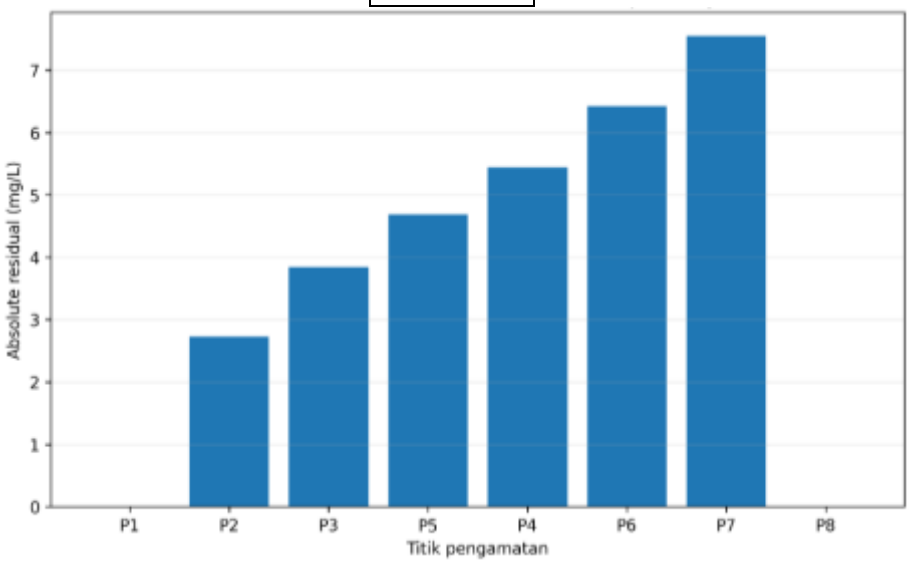
Distribusi Residual Model

Residual absolut dihitung menggunakan:

$$|e_i| = |C_{obs,i} - C_{model,i}|.$$

Nilai residual terbesar diperoleh pada P7 sebesar:

$$\boxed{7{,}55\ mg/L}.$$



Gambar 6. *Distribusi residual absolut model transport-only pada setiap titik pengamatan.*

Residual absolut meningkat dari P2 hingga P7, sedangkan residual pada P1 dan P8 bernilai nol karena konsentrasi pada kedua titik tersebut ditetapkan sebagai kondisi batas. Residual terbesar terdapat pada P7 sebesar 7,55 mg/L. Hasil ini menunjukkan bahwa ketidaksesuaian model terhadap data sekunder bervariasi sepanjang titik interior. Namun, jumlah titik yang terbatas belum memberikan dasar yang memadai untuk menyimpulkan sifat acak atau korelasi spasial residual.

Estimasi Apparent Source Term

Ketidaksesuaian antara model transport-only dan observasi selanjutnya digunakan untuk membangun formulasi *source-augmented*:

$$A_m \mathrm{C} = \mathrm{b} + \mathrm{S}.$$

Apparent source vector dihitung menggunakan:

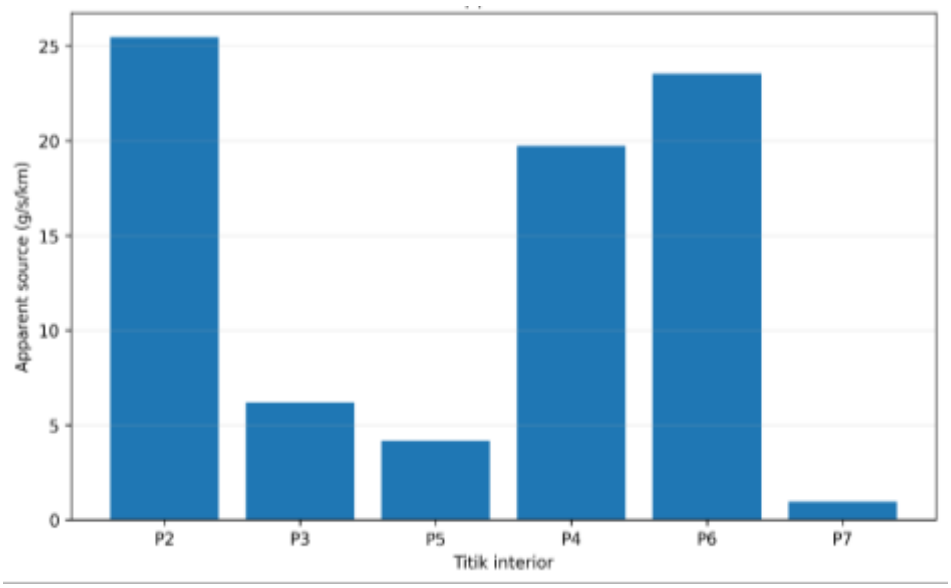
$$\boxed{\mathrm{S} = A_m \mathrm{C}_{obs} - \mathrm{b}}$$

Tabel 8. Apparent source term

Titik	Apparent source (g/s/km)
P2	25,4660
P3	6,1992
P5	4,1615
P4	19,7335
P6	23,5287
P7	0,9515

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

Nilai *apparent source* terbesar diperoleh pada P2 sebesar 25,4660 g/s/km, diikuti P6 sebesar 23,5287 g/s/km dan P4 sebesar 19,7335 g/s/km.



Gambar 5. *Distribusi apparent source term pada titik interior.*

Gambar 5 menunjukkan bahwa kebutuhan tambahan massa secara matematis tidak tersebar secara seragam sepanjang domain. Nilai yang relatif tinggi terdapat pada P2, P4, dan P6.

Nilai *apparent source* tersebut tidak ditafsirkan sebagai bukti bahwa lokasi tersebut merupakan sumber pencemar aktual. Nilai tersebut merupakan besaran yang diperlukan oleh formulasi model untuk menjelaskan perbedaan antara profil transport-only dan profil observasi.

Faktorisasi LU

Sistem persamaan source-augmented kemudian difaktorkan menggunakan:

$$A_m = LU.$$

Hasil faktorisasi Doolittle menghasilkan matriks L dan U berikut.

Tabel 9. Matriks Lhasil faktorisasi LU

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.007860 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.577895 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.727090 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1.493736 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.639435 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.576540 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tabel 10. Matriks U hasil faktorisasi LU

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.009338 & -9.6731 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.005453 & -3.0010 \times 10^{-7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.004126 & -5.1326 \times 10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.008951 & -1.0305 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.008510 & -4.9731 \times 10^{-7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.004300 & -2.4386 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

Matriks L menunjukkan struktur segitiga bawah dengan elemen diagonal utama bernilai satu, sedangkan U memiliki struktur segitiga atas. Nilai yang ditampilkan merupakan hasil numerik faktorisasi sistem yang digunakan dalam penelitian.

Konsistensi Numerik *Source-Augmented* Model

Setelah *apparent source term* dihitung berdasarkan profil observasi, sistem *source-augmented* diselesaikan kembali menggunakan faktorisasi LU.

Error maksimum antara profil target dan hasil penyelesaian adalah:

$$\boxed{5{,}329 \times 10^{-15}\ mg/L}$$

Nilai tersebut berada pada orde kesalahan pembulatan numerik.

Hasil ini menunjukkan bahwa sistem aljabar, faktorisasi LU, dan proses substitusi berjalan secara konsisten.

Namun, hasil tersebut tidak dianggap sebagai validasi independen model karena data observasi digunakan secara langsung dalam pembentukan *apparent source term*:

$$\mathrm{S} = A_m \mathrm{C}_{obs} - \mathrm{b}.$$

Dengan demikian, hasil ini merupakan demonstrasi konsistensi numerik dan kemampuan formulasi source-augmented untuk mereproduksi profil target secara aljabar, bukan pengujian kemampuan prediktif model terhadap data yang belum digunakan dalam proses estimasi.

PEMBAHASAN

Variasi debit dan konsentrasi BOD dalam penelitian ini menunjukkan bahwa perubahan kualitas air tidak cukup dijelaskan melalui konsentrasi saja. Penurunan konsentrasi dapat berlangsung bersamaan dengan peningkatan beban ketika debit bertambah. Karena itu, pembacaan fluks memberikan informasi tambahan untuk membedakan perubahan kandungan pencemar dari perubahan massa yang terbawa aliran. Temuan ini selaras dengan Sun et al. (2023), yang memasukkan aliran lateral dan masukan pencemar secara bersama dalam pemodelan kualitas air. Namun, karena masukan lateral belum diukur, perubahan fluks dalam penelitian ini belum dapat langsung dikaitkan dengan sumber pencemar tertentu.

Model tanpa sumber eksternal belum mampu mengikuti profil BOD observasi secara memadai, meskipun parameter dispersi dan peluruhan telah disesuaikan. Hasil ini menunjukkan bahwa perubahan kedua parameter belum cukup menjelaskan pola yang ditemukan. Konfigurasi terbaik yang berada pada batas rentang pencarian juga belum dapat dianggap sebagai parameter fisik sungai yang teridentifikasi. Nilai peluruhan nol pada konfigurasi tersebut, misalnya, tidak membuktikan bahwa biodegradasi tidak berlangsung. Mengikuti kerangka ketidakpastian Sun et al. (2026), hasil tersebut perlu dibaca sebagai kemungkinan pengaruh gabungan antara keterbatasan data, parameter, dan proses yang belum terwakili.

Ketidaksesuaian tersebut menjadi dasar pembentukan *apparent source term*. Penambahan komponen ini memungkinkan profil observasi direkonstruksi, tetapi kesesuaiannya muncul karena sumber dihitung dari observasi melalui sistem model yang sama. Dengan demikian, hasil tersebut menunjukkan besarnya koreksi neraca yang diperlukan, bukan membuktikan keberadaan maupun besar sumber fisik. Pembedaan ini penting ketika dibandingkan dengan Lugão et al. (2022) dan Zhu et al. (2024), yang menempatkan karakteristik sumber sebagai objek estimasi invers. Dalam penelitian ini, komponen koreksi masih dapat mencakup masukan pencemar yang belum dimodelkan, ketidakpastian debit, dan keterbatasan representasi transport.

Sebaran *apparent source term* karena itu lebih berguna sebagai petunjuk untuk menentukan segmen yang perlu diperiksa lebih lanjut. Segmen dengan koreksi lebih besar menunjukkan kebutuhan penjelasan tambahan terhadap neraca model, tetapi belum tentu merupakan lokasi

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224

dengan pembuangan limbah terbesar. Yin et al. (2023) dan Yang et al. (2024) memperlihatkan bahwa identifikasi sumber membutuhkan dukungan informasi hidrodinamika dan rancangan pengamatan. Sejalan dengan itu, konsentrasi lateral ekuivalen dalam penelitian ini juga perlu dipahami sebagai perkiraan pada asumsi neraca yang disederhanakan, bukan konsentrasi buangan yang telah terukur.

Penilaian kesesuaian model turut dipengaruhi oleh konsentrasi hulu dan hilir yang ditetapkan sebagai kondisi Dirichlet. Kesesuaian pada kedua titik tersebut merupakan bagian dari pembentukan solusi, sehingga kesalahan pada titik interior lebih mencerminkan kemampuan model menjelaskan profil yang tidak dipaksakan sebagai kondisi batas. Selain itu, penggunaan skema *upwind* pada grid yang terbatas memungkinkan adanya pengaruh difusi numerik, tetapi besarnya belum diketahui. Nadella et al. (2023) dan Wang et al. (2024) membahas persoalan numerik dalam pemodelan transport; bagi penelitian ini, relevansinya terletak pada kebutuhan pengujian grid sebelum perbedaan simulasi seluruhnya ditafsirkan sebagai proses lingkungan.

Keterbatasan penelitian mencakup data konsentrasi sekunder hasil digitasi, delapan titik pengamatan, jarak yang belum mengikuti garis tengah sungai, serta belum tersedianya pengukuran masukan lateral. Pemodelan juga terbatas pada BOD, sehingga hasilnya belum menjelaskan hubungan dinamis BOD dengan COD dan DO. Belum dilakukannya pengujian sensitivitas dan evaluasi dengan data independen membatasi klaim keandalan model. Sebagaimana dibedakan oleh Das et al. (2024), kesesuaian pada data pembentukan model belum setara dengan validasi independen. Oleh karena itu, kontribusi penelitian ini terletak pada penelusuran neraca pencemar dan penyusunan hipotesis untuk pemeriksaan lapangan, sementara kemampuan prediksi serta identifikasi sumber fisiknya masih memerlukan pengujian lanjutan.

KESIMPULAN

Penelitian ini menunjukkan bahwa perubahan konsentrasi BOD perlu ditafsirkan bersama debit untuk memahami beban pencemar. Penyesuaian dispersi dan peluruhan belum cukup menjelaskan profil observasi, sedangkan *apparent source term* memungkinkan rekonstruksi sebagai koreksi neraca, bukan bukti sumber pencemar aktual. Model ini dapat menjadi dasar penentuan prioritas pemeriksaan lapangan, tetapi kemampuan prediksi dan identifikasi sumbernya masih memerlukan data serta validasi independen.

DAFTAR PUSTAKA

Bai, J., Zhao, J., Zhang, Z., & Tian, Z. (2022). Assessment and a review of research on surface water quality modeling. *Ecological Modelling, 466*, 109888. https://doi.org/10.1016/j.ecolmodel.2022.109888

Das, S. K., Ahsan, A., Khan, M. H. R. B., Yilmaz, A. G., Ahmed, S., Imteaz, M., Tariq, M. A. U. R., Shafiquzzaman, M., Ng, A. W. M., & Al-Ansari, N. (2024). Calibration, validation and uncertainty analysis of a SWAT water quality model. *Applied Water Science, 14*, Article 86. https://doi.org/10.1007/s13201-024-02138-x

Datta, B. N. (2010). *Numerical linear algebra and applications* (2nd ed.). Society for Industrial and Applied Mathematics. https://doi.org/10.1137/1.9780898717655

Fardadi Shilsar, M. J., Mazaheri, M., & Samani, J. M. V. (2023). A semi-analytical solution for one-dimensional pollutant transport equation in different types of river networks. *Journal of Hydrology, 619*, Article 129287. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2023.129287

Hasibuan, N. H. (2013). *Kajian kualitas air dan simulasi transpor kromium (Cr) di perairan terbuka (studi kasus air Sungai Deli, Medan)* [Tesis magister, Institut Teknologi Bandung].

Volume : 02 | Nomor 02 | Desember 2025 | E-ISSN : 3048-0787 | DOI: 10.47709/mda.v2i2.6224
Lugão, B. C., Knupp, D. C., & Rodriges, P. P. G. W. (2022). Direct and inverse simulation applied to the identification and quantification of point pollution sources in rivers. *Environmental Modelling & Software, 156*, Article 105488. https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2022.105488

Lyche, T., Muntingh, G., & Ryan, Ø. (2020). *Exercises in numerical linear algebra and matrix factorizations*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-59789-4

Mohamad Noor, S. S., Saad, N. A., Mohd Akhir, M. F., & Abd Rahim, M. S. (2025). QUAL2K water quality model: A comprehensive review of its applications, and limitations. *Environmental Modelling & Software, 184*, Article 106284. https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2024.106284

Nadella, A., Maulik, D., & Sen, D. (2023). One-dimensional numerical model for unsteady solute transport in open channels under multi-point loading. *Journal of Hydrology, 616*, Article 128830. https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2022.128830

Rizzello, S., Vitolo, R., Napoli, G., & De Bartolo, S. (2023). Master equation model for solute transport in river basins: Part I channel fluvial scale. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 37*, 3807–3817. https://doi.org/10.1007/s00477-023-02481-6

Sun, X., Jakeman, A., Croke, B., & Chen, M. (2026). A review of how uncertainties are assessed in water quality modeling: A paradigm shift towards more complete practices. *Environmental Modelling & Software, 204*, Article 107068. https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2026.107068

Sun, Z., Cheng, K., Liu, J., Guo, W., & Guo, J. (2023). Simulation of water quality in a river network with time-varying lateral inflows and pollutants. *Water, 15*(16), Article 2861. https://doi.org/10.3390/w15162861

Wang, C.-H., Yu, H.-L., & Chang, T.-J. (2024). A novel cellular automata framework for modeling depth-averaged solute transport during pluvial and fluvial floods. *Water, 16*(1), Article 129. https://doi.org/10.3390/w16010129

Wool, T., Ambrose, R. B., Jr., Martin, J. L., & Comer, A. (2020). WASP 8: The next generation in the 50-year evolution of USEPA's water quality model. *Water, 12*(5), Article 1398. https://doi.org/10.3390/w12051398

Yang, R., Jiang, J., Pang, T., Yang, Z., Han, F., Li, H., Wang, H., & Zheng, Y. (2024). Crucial time of emergency monitoring for reliable numerical pollution source identification. *Water Research, 265*, Article 122303. https://doi.org/10.1016/j.watres.2024.122303

Yin, H., Lin, Y., Zhang, H., Wu, R., & Xu, Z. (2023). Identification of pollution sources in rivers using a hydrodynamic diffusion wave model and improved Bayesian-Markov chain Monte Carlo algorithm. *Frontiers of Environmental Science & Engineering, 17*(7), Article 85. https://doi.org/10.1007/s11783-023-1685-1

Zhu, Y., Cao, H., Gao, Z., & Chen, Z. (2024). A DiffeRential Evolution Adaptive Metropolis (DREAM)-based inverse model for continuous release source identification in river pollution incidents: Quantitative evaluation and sensitivity analysis. *Environmental Pollution, 347*, Article 123448. https://doi.org/10.1016/j.envpol.2024.123448